UNIVERSITE ABDELMALEK ESSADI
Ecoles National des Sciences Appliqués
Tétouan

Année universitaire 2010/2011
1ère année CP

TD de mécanique (Série 2)

Exercice 1

A l'instant t = 0, un corps est lancé avec une vitesse initiale V_0 dont le module est 4 m/s. Calculer l'abscisse du point le plus élevée de la trajectoire (point culminant) et la date correspondante ($g = 10\ m/s^2$).

Exercice 2

Une particule se déplace avec une accélération donnée en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\gamma} = \exp(-t)\vec{i} + 5\sin(t)\vec{j} - 3\cos(t)\vec{k}$$

A t = 0, la particule est située en (1, 0 , 3), sa vitesse est alors (1, 2 , -1).
Déterminer la vitesse et la position de la particule quel que soit t.

Exercice 3

Une particule, initialement à l'origine, se déplace sur l'axe Ox avec une vitesse constante $\vec{V}_0$.
L'axe Ox tourne autour de l'axe Oz qui lui est perpendiculaire à la vitesse ω constante.

1- Rappeler les expressions des composantes des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires.
2- Déterminer l'équation de la trajectoire de la particule en coordonnées polaires
3- Exprimer l'accélération en fonction de V_0, w et des vecteurs unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

Exercice 4

Les coordonnées cartésiennes d'un point mobile dans un repère orthonormé direct (Ox, Oy) sont : $x = A\cos\omega t$; et $y = A\sin wt + B$ (A = 10 cm ; B = 15 cm)

1) Quelle est l'allure de la trajectoire du mobile et de son hodographe ?
2) Montrer que le mouvement est uniforme et calculer sa vitesse
3) Calculer le module du vecteur accélération $\vec{\gamma}$ et déterminer ensuite les valeurs des composantes tangentielles et normales de l'accélération ($\omega = 3.15$ rad/s)

Exercice 5

Dans un repère cartésien fixe R (Oxyz), un point mobile M est repéré par son vecteur position:

$$\overline{OM} = t\,\vec{e}_x + a t^2\,\vec{e}_y$$ (a est une constante positive et t est le temps)

où $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est la base orthonormée directe associée à R.

1- a- Trouver l'équation de la trajectoire de la particule M.
b- Quelle est la nature de cette trajectoire ?.
2- Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ et calculer son module.
3- Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ et calculer son module
4- Exprimer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ dans la base de Frenet
5- Trouver le rayon de courbure de la trajectoire de la particule M.
6- Exprimer les coordonnées polaires r et θ en fonction de t.



UNIVERSITE ABDELMALEK ESSADI
Ecoles National des Sciences Appliqués
Tétouan

Année universitaire 2010/2011
1ère année CP

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé xOy d'origine O et de base $(\vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées x et y d'un point M mobile dans le plan varient avec le temps t selon les relations :

$$x = 2\cos(0.5\,t) \quad \text{et} \quad y = 2\sin(0.5\,t)$$

1- Déterminer la nature de la trajectoire.
2- Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$.
3- Déterminer l'expression de la vitesse $\frac{dS}{dt}$ ainsi que celle de l'abscisse curviligne S du point M à l'instant t, en prenant comme condition initiale S = 0 à t = 0.
4- Calculer les composantes du vecteur accélération, puis les expressions des accélérations tangentielles et normale.
5- Déterminer l'expression du rayon de courbure de la trajectoire.
6- La trajectoire reste la même, mais maintenant, le point M subit une accélération angulair3e $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{t}{5}$. A quelle date, le point M atteint-il une vitesse linéaire de 10 m/s sachant qu'il est parti au repos ? Quelle distance a-t-il alors parcouru ?

Exercice 7

On étudie le mouvement d'un point M dont le vecteur accélération est donné par :

$$\vec{\gamma} = k\,\frac{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}}{r^3}$$

Où k est une constante positive donnée, O un point fixe, $\vec{V}$ le vecteur vitesse de M et r la distance OM supposée non nulle. A l'instant t = 0, le vecteur vitesse $\vec{V}_0$ est perpendiculaire $\overrightarrow{OM}_0$. On pose a = OM_0, la valeur initiale de r. et S(o) = 0

1- Exprimer, en fonction de t, l'abscisse curviligne de M sur sa trajectoire en prenant pour origine la position initiale.
2- Calculer la dérivée par rapport au temps du produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{V}$. En déduire l'expression de r en fonction du temps.
3- On appelle α l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$. Trouver α en fonction de V_0, a et t.
4- Calculer, en fonction de α, le module du vecteur accélération $\vec{\gamma}$ de M et le rayon du courbure de la trajectoire de M.

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$x_g(t) = \frac{1}{6} e^{t} - \frac{1}{15} e^{-2t}.$

Serie 2 :

Ex 1 :

$\vec{\gamma} = e^{-t}\,\vec{i} + 5\sin t\,\vec{j} - 3\cos t\,\vec{k}$

A $t = 0$ $\quad \overrightarrow{OM} = \vec{i} + 3\vec{k}$

$\vec{V}_0 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$

$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$

$\frac{dV_x}{dt} = e^{-t} \Rightarrow V_x = \int e^{-t} = e^{-t} + 2.$

$V_y = 5\int \sin t. = -5\cos t + C \quad , C = 7$

$V_z = -3\int \cos t. = -3\sin t + C \quad , C = -1$

$\vec{V} = (-e^{-t} + 2)\vec{i} + (-5\cos t + 7)\vec{j} - (3\sin t + 1)\vec{k}$

on a $\quad V_x = -e^{-t} + 1$

$V_y = -5\cos t + 2 \Rightarrow V_z = -3\sin t - 1$

$\Rightarrow x = \int(-e^{-t} + 2)dt = e^{-t} + 2t + 1$

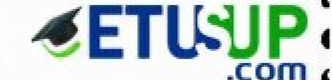
$\Rightarrow y = \int -5\cos t + 7t + y_0$

$y = -5\sin t + 7t$

$z = \int(-3\sin t - 1)\,dt = 3\cos t - t + C, \quad C = 0$

donc :

$\overrightarrow{OM} = (-e^{-t} + 2t + 1)\vec{i} + (-5\sin t + 7t)\vec{j} - (3\cos t - t)\vec{k}$



3 Les composantes des vecteurs position, vitesse et acceleration en coordonnées polaires : $\vec{OM} = r\vec{e}_r$

$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

avec $\omega = \dot{\theta}$, ω est cte

et $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$

$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

avc $\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = 0$

$\vec{\gamma} = \ddot{r} - r\omega^2$

2 - Le pt M se deplace sur l'axe (ox) d'une vitesse cte $\Rightarrow$ un mvt rectiligne uniforme

$\Rightarrow$ on aura l'eq. suivante.

$r(t) = v_0 t + cte$

$r(0) = 0$

$r(t) = v_0 . t$. (1)

Et puisqu'on a l'axe (ox) tourne autour (oz) avec une vitesse $\omega = cte$

$\theta(t) = \omega t + c_1$

$\theta(0) = 0$

$\Rightarrow t = \frac{\theta(t)}{\omega}$

on remplac ds l'eq. (1).

$r(t) = v . \frac{\theta(t)}{\omega}$

r varie proportionellement avc θ, Donc le pt M quand il tourne avec l'angle θ, il s'eloigne de l'origine, c'est l'eq $r = a\theta$. Eq polaire d'une spirale.

3 - on a $r(t) = v_0 t \Rightarrow \dot{r} = v_0$

Et on a

$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

on remplace, on a

$\vec{\gamma} = r(\dot{\theta})^2\vec{e}_r + 2v_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$= -r\omega^2\vec{e}_r + 2v_0\omega\vec{e}_\theta$

avec $\vec{\gamma}_r = -r\omega^2 t\vec{e}_r$

$\vec{\gamma}_\theta = 2v_0\omega . \vec{e}_\theta$.

Ex 4

$x = A\cos\omega t$, $A = 10$ cm

$y = A\sin\omega t + B$ $B = 15$ cm

1 - L'allure de la trajectoire

on a $\vec{OM} = x\vec{I} - y\vec{J}$

$x(t) = A\cos\omega t$

$y(t) = A\sin\omega t + B$

on remarque que

$x^2 + (y - B)^2 = A^2$

~~$\cos^2\omega t$~~

$x^2 + (y - B)^2 = A^2$ c'est l'eq. d'un cercle de rayon $A = 10$ et de centre $O(0, B)$

L'hodographe

$x(t) = A\cos\omega t$

$\Rightarrow V_x(t) = -A\omega\sin\omega t$

$y(t) = A\sin(\omega t) + B$

$\Rightarrow V_y(t) = A\omega\cos(\omega t)$

$V_x^2 + V_y^2 = (A\omega)^2$

2) $V = cte \Rightarrow$ Mvt est uniforme

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = A\omega = cte$.

$\Rightarrow$ Mvt uniforme.

A.N : $V = 10.10^{-2} . 3,15$

$V = 0,315$ m/s.

3) $\ddot{x} = -A\omega^2 \cos\omega t$

$\ddot{y} = -A\omega^2 \sin\omega t$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = A\omega^2$

~~$\vec{a} = a_T \vec{u} + a_n \vec{v}$~~

$\vec{a} = a_T \vec{u} + a_n \vec{n}$

$a_T = \frac{du}{dt} = 0$, $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

$= A\omega^2$

$a_n = 0,315 \ m.s^{-2}$

Ex 5. $\vec{OM} = t\,\vec{e_x} + at^2\,\vec{e_y}$

$\vec{OM} \begin{cases} x = t \\ y = at^2 \end{cases} \Rightarrow y = ax^2$

c'est l'éq. parabole.

2- $\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R$

$= \frac{d}{dt}(t\vec{e_x} + at^2\vec{e_y})$

$V(M/R) = \vec{e_x} + 2at\,\vec{e_y}$

$V(M/R) = \sqrt{1+(2at)^2}$

3- $\vec{\gamma}(M/R)$

$= \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_R$

$= \frac{d}{dt}(\vec{e_x} + 2at\,\vec{e_y})$

$\vec{\gamma}(M/R) = 2a\,\vec{e_y}$

$\gamma(M/R) = 2a.$

4- $\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{e_t}$

$+ \frac{V^2}{\rho}\, e$

$\gamma_t = \frac{dV}{dt} = \frac{4a^2t}{\sqrt{1+(2a)^2}}$

$\vec{\gamma} = \vec{\gamma_t} + \vec{\gamma_n}$

$\gamma^2 = (\vec{\gamma_t} + \vec{\gamma_n})^2$

$\gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_n^2$

$\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2$

$\gamma_n = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_t^2}$

$\gamma_n = 2a\sqrt{\frac{1+3(a^2t)^2}{1+(2at)^2}}$

on a $\frac{V^2}{\rho} = \gamma_n$

$\rho = \frac{V^2}{\gamma_n} = \frac{\left[(1+(2at)^2)(1+(3a^2t)^2)\right]^{1/2}}{2a}$

6) -

~~4)~~ Ex 6 :

$x(t) = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)$

$y(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

1- $x^2 + y^2 = 4$. Alors la trajectoire est un cercle de centre $(0,0)$

2) Les composantes de la vitesse

$V_x(t) = \dot{x}(t) = 2.\frac{1}{2}\left(-\sin\left(0{,}5\frac{t}{2}\right)\right)$

$= -\sin(0{,}5\,t/2)$

$V_y(t) = \dot{y}(t) = \cos(t/2)$.

4- $\vec{\gamma}(t) = \ddot{x}(t) + \ddot{y}(t)$

$\dot{x} = -\sin\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$

$\dot{y} = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$.

Alors

$\vec{\gamma}(t) = -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\vec{j}\right)$

Calcul de l'acc tangentielle.

$\gamma_T = \frac{dV}{dt} = 0$ (car $V = cte$)

$\rightarrow \gamma = \gamma_N = \frac{1}{2}$

4 - Le rayon de la courbure

on a $\gamma_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{1}{2}$

alors $\rho = 2V^2 = 2$

$\rho = R = 2 \Rightarrow$ mvt circulaire

6) $\frac{d^2\theta}{dt} = \ddot{\theta} = \frac{t}{5}$

$\dot{\theta} = \int \ddot{\theta}\, dt = \int \frac{t}{5}\, dt$

$= \frac{t^2}{10} + cte$

on a $cte = 0$ ($\dot{\theta}(0) = 0$)

Puiske la trajectoire reste circulaire

$V = R\dot{\theta} = \frac{2t^2}{10} = \frac{t^2}{5}$.

et on a la vitesse linéaire de 10 m/s donc $V = \frac{t^2}{5} = 10$

donc $t = \sqrt{50} = 7{,}07$ s.

La distance parcouru

on a $\dot{\theta} = \frac{t^2}{10} \Rightarrow \theta = \int \dot{\theta}\, dt$

$\theta = \int \frac{t^2}{10}$

$\theta = \frac{t^3}{30} + c$ ($\theta(0) = 0$)

$S = R\theta = 2\frac{t^3}{30}$

$S = 23{,}55$ m

x0 7 $\frac{ds}{dt} = dV \Rightarrow S = \int V . dt$.

$V = cte$, $\frac{dV}{dt} = 0 \rightarrow \gamma_t = 0$

$\vec{\gamma} \perp \vec{V}$ (car $\vec{\gamma} : (\vec{OM} \wedge \vec{V})$)

or $\vec{V}$ est porté par la tangentielle à la Traj.

$\gamma_T = 0$ $\vec{V} = V.\vec{e}_t$

$\Rightarrow V = cte = V_0$.

$\Rightarrow S = V_0 \int dt = V_0 t + cte$.

$S(0) = 0 \Rightarrow S = V_0 t$.

2). $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt}\vec{V} + \frac{d\vec{W}}{dt}\vec{OM}$

$= V^2 + \vec{\gamma}.\vec{OM}$

puiske $\vec{\gamma} \perp \vec{OM} = \vec{\gamma}.\vec{OM} = 0$

donc: $\frac{d(\vec{OM}.\vec{V})}{dt} = V^2 = V_0^2$

~~donc $d(\vec{OM}$~~

$d(\vec{OM}.\vec{v}) = v_0^2 . dt$.

$\vec{OM}.\vec{v} = \int v_0^2\, dt$.

$= v_0^2 t + c$

à $t = 0$ on a $\vec{OM} \perp \vec{v_0}$

$\Rightarrow \vec{OM}.\vec{v_0} = 0 \Rightarrow c = 0$

$\vec{OM}.\vec{v} = v_0^2 t$

on a $\vec{r} = \vec{OM} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Alors $\vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt} = v_0^2 t$.

d'autre part

$\vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{r}^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} = v_0^2 t$.

$\Rightarrow \frac{dr^2}{dt} = 2v_0^2 t$.

$\Rightarrow r^2 = v_0^2 t^2 + c$

$\Rightarrow r^2 = v_0^2 t^2 + c$

à $t = 0$ $r = a \Rightarrow c = a^2$

$r(t) = \sqrt{v_0^2 t^2 + a^2}$

$\vec{OM}.\vec{V} = \|\vec{OM}\|.\|\vec{V}\| = rV_0 \cos\alpha$

$= v_0^2 t \Rightarrow r\cos\alpha = v_0 t$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

$= 1 - \left(\frac{v_0 t}{r}\right)^2$

$$= \frac{r^2 - (v_0 t)^2}{r^2} = \frac{a^2}{r^2}$$

$r \sin\alpha = a$

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \cot g\,\alpha = \frac{v_0 t}{a}$.

on a : $\vec{\gamma} = \frac{K}{r^3} (\vec{OM} \wedge \vec{v})$

$= \|\vec{\gamma}\| . \frac{K}{r^3} . v_0^2 t$

$= \frac{K}{r^3} v . r \sin\alpha$

$\Rightarrow \|\vec{\gamma}\| = \frac{K . v_0}{r^2} \sin^3\alpha$.

d on a $\gamma = 0 \Rightarrow \gamma_n = \gamma = \frac{v_0}{\varphi}$

$\Rightarrow \varphi = \frac{v_0^2}{\gamma_n} = \frac{v_0^2\, a^2}{K v_0^2 \sin^2\alpha}$

Exo5 (suite) 8

Equation polaires

$x = r\cos\theta = t$

$y = r \sin\theta = at^2$

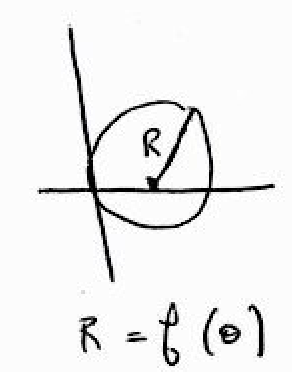
$\Rightarrow r\sin\theta = a\,(r\cos\theta)$

$r\sin\theta = ar^2 \cos^2\theta$

$r = \frac{1}{a} . \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

c'est l'eq. polaire d'une parabole.

* Ex suplementaire :



$R = f(\theta)$

Physique 3 : serie 3

Ex 1 :

1-a.

$R'(O', x', y', z')$

réf. relatif (mobile)

Base. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$

$R(O, x, y, z)$ Ref fixe (absolue) $\rightarrow$ Base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{u} = \cos(wt)\,\vec{i} + \sin(wt)\,\vec{j}$

$\vec{v} = -\sin(wt)\,\vec{i} + \cos(wt)\,\vec{j}$

$\frac{d\vec{u}}{dt} = w(-\sin wt\,\vec{i} + \cos wt\,\vec{j})$

$= w\vec{v}$

$= w(\vec{k} \wedge \vec{u}) = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}$

b) $\frac{d\vec{v}}{dt} = w\vec{u} = w(\vec{k} \wedge \vec{v})$

$= \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}$

autrement

puiske $\vec{u}$ est fimi

$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}$

$\vec{\Omega}_{R'/R} = w\vec{k}$.

c) on a $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\vec{OO'} + \vec{O'M})}{dt}$

$= \frac{d(\vec{OO'})}{dt}\Big)_R + \frac{d(\vec{O'M})}{dt}\Big)_R$

$+ \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM}$

$\vec{v}_a = \vec{v}_a(O') + \vec{v}_r(M)$

$+ \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$


ETUSUP.com